

## Практическое занятие № 4 Сетевое планирование Расчет временных параметров сетевого графика

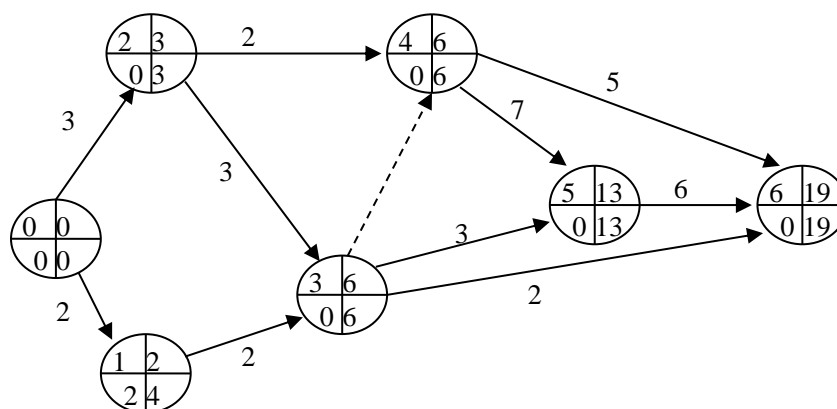
### Построение календарного графика

**Пример.** Рассмотрим сетевую модель с исходным событием 0 и завершающим событием 6.

Операция ( $i, j$ )	Продолжи- тельность ( $D_{ij}$ )	Раннее		Позднее		Полный резерв ( $PP_{ij}$ )	Свободный резерв ( $CP_{ij}$ )
		начало ( $T_i^{P.H.}$ )	окончание ( $T_{ij}^{P.O.}$ )	начало ( $T_{ij}^{П.H.}$ )	окончание ( $T_j^{П.O.}$ )		
(0, 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0, 2)*	3	0	3	0	3	0	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)*	3	3	6	3	6	0	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3, 4)*	0	6	6	6	6	0	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)*	7	6	13	6	13	0	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)*	6	13	19	13	19	0	0

Построить календарный график модели.

*Решение.* Данные, необходимые для построения календарного графика, приведены в таблице. Прежде всего, определяются календарные сроки выполнения критических операций. Далее рассматриваются не критические операции, и указываются их ранние сроки начала ( $T^{P.H.}$ ) и поздние сроки окончания ( $T^{П.O.}$ ).



Критические операции изображаются сплошными линиями. Отрезки времени, в пределах которых могут выполняться не критические операции, наносятся пунктирными линиями, показывающими, что календарные сроки этих операций можно выбрать в указанных пределах при условии сохранения отношений следования.

На рисунке 18 показан календарный график, соответствующий примеру. Фиктивная операция (3, 4) не требует затрат времени, поэтому показана на графике вертикальным отрезком. Числа, проставленные над не критическими операциями, соответствуют их продолжительностям.

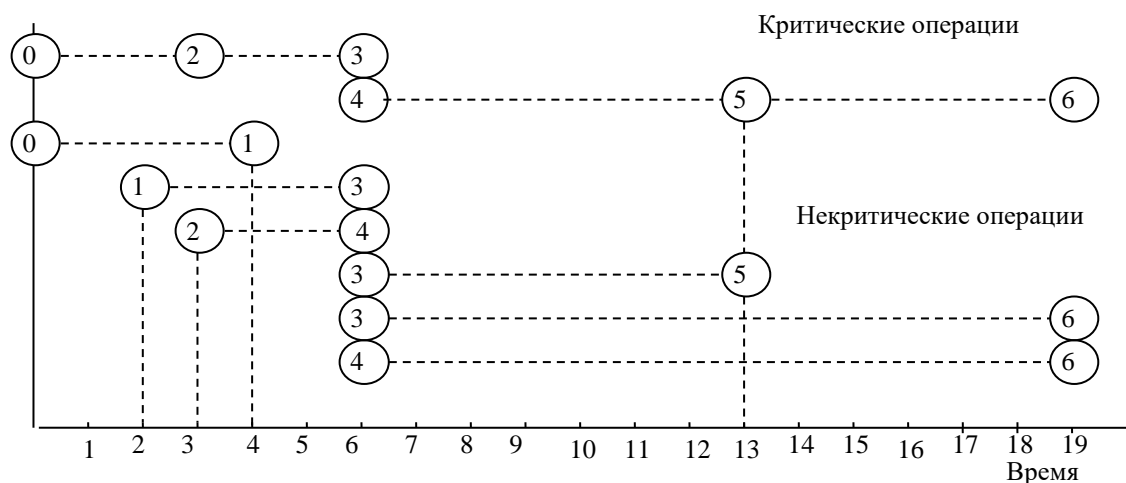


Рис. 18

Роль полных и свободных резервов' времени при выборе календарных сроков выполнения некритических операций объясняется двумя общими правилами:

*Правило 1.* Если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием (пунктирные отрезки на рисунке 18).

*Правило 2.* Если свободный резерв меньше полного, то срок начала некритической операции можно сдвинуть по отношению к ее раннему сроку начала не более чем на величину свободного резерва, не влияя при этом на выбор календарных сроков непосредственно следующих операций.

В рассматриваемом примере правило 2 применимо только к операции (0, 1), а календарные сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1.

### Задания для решения в аудитории

1. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ при нормальном режиме, критический путь и минимальную стоимость работ при максимальном режиме. Исходные данные указаны в таблице.

Операция	Нормальный режим работ		Максимальный режим работ	
	продолжительность, дней	стоимость, ден. ед.	продолжительность, дней	стоимость, ден. ед.
1, 2	4	80	2	150
1, 3	2	50	1	70
1, 4	3	60	2	80
2, 4	2	60	1	70
2, 6	6	100	3	160
3, 4	2	40	1	60
3, 5	3	70	2	90
4, 6	4	90	2	170
5, 6	4	80	2	160

2. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ при нормальном режиме, критический путь и минимальную стоимость работ при максимальном режиме. Исходные данные указаны в таблице.

Операция	Нормальный режим работ		Максимальный режим работ	
	продолжительность, дней	стоимость, ден. ед.	продолжительность, дней	стоимость, ден. ед.
1, 2	5	110	4	130
1, 3	3	70	2	90
1, 4	2	50	1	60
2, 5	3	60	2	80
2, 6	4	80	2	110
3, 6	2	60	1	70
4, 7	6	110	4	150
5, 7	3	70	2	80
6, 7	5	100	2	150

### ***График привязки (график Ганта)***

Для небольших проектов удобным дополнением к сетевому графику является **линейный график** (график Ганта).

Для проведения анализа временных параметров сетевой модели используют **график привязки**, который отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – отрезки, соответствующие длительностям работ (раннее начало и раннее окончание работ). График привязки можно построить на основе данных о продолжительности работ. При этом необходимо помнить, что работа  $(i, j)$  может выполняться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы  $(k, i)$ .

При поиске критических путей следует помнить, что признаком критической работы являются нулевые значения резервов времени. Это означает, что каждая последующая критическая работа будет начинаться строго в момент окончания предыдущей критической работы. Вследствие этого сдвиг любой из работ критического пути обязательно приведет к увеличению первоначальной длительности проекта ( $T_{кр}$ ). Кроме того, следует учесть, что критический путь является полным, т. е. соединяет исходное и завершающее события сети. Поэтому на графике привязки первая из работ критического пути всегда начинается в исходном событии сети с нулевого (начального) момента времени, а последняя из работ критического пути всегда завершается позже всех остальных работ сети в завершающем событии.

Из вышеприведенных соображений следует способ определения критического пути на графике привязки (все найденные работы выписываются последовательно справа налево):

1) найти на графике привязки и выписать работу  $(i, j)$ , которая заканчивается позже всех остальных. Это будет последняя работа критического пути (ее конечное событие имеет номер завершающего события сети);

2) из всех работ сети  $(k, i)$ , конечное событие которых  $i$  совпадает с начальным событием  $i$  работы  $(i, j)$ , найденной в п. 1, выбрать и выписать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе  $(i, j)$ ;

3) из всех работ сети  $(l, k)$ , конечное событие которых  $k$  совпадает с начальным событием  $k$  работы  $(k, i)$ , найденной в п. 2, выбрать и выписать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе  $(k, i)$ ;

4) продолжать п. 3 до тех пор, пока не будет найдена исходная работа сети, т. е. начинающаяся в нулевой момент времени (ее начальное событие будет иметь номер исходного события сети, например, 1).

Следует заметить, что если в сетевой модели несколько критических путей, то, выполняя вышеописанные действия, можно обнаружить несколько работ, удовлетворяющих сформулированным требованиям. В таком случае необходимо продолжать поиск по каждой из таких работ в отдельности. В сложных сетевых моделях подобные разветвления могут привести к большим затратам времени на поиск критических путей. Тем не менее, такой способ хорош для учебных целей, поскольку дает понимание значения критических работ в сетевой модели и учит «читать» и понимать график привязки.

**Пример.** По данным о кодах и длительностях работ в днях построить график привязки сетевой модели, определить критические пути и их длительность. Определить свободные и полные резервы каждой работы, отметить на графике привязки свободные резервы работ.

$(i, j)$	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 3	3, 6	3, 7	4, 5	4, 6	5, 7	6, 7
$t(i, j)$ , дней	3	3	2	10	2	5	9	10	6	1	4

*Решение.*

*I. Поиск критических путей.*

1) Построим график привязки (рис. 19).

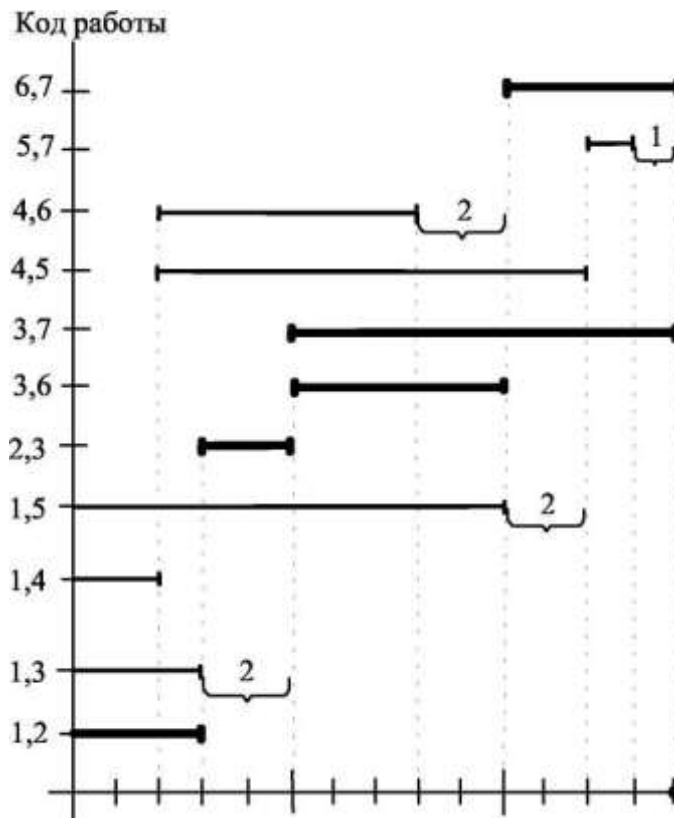


Рис. 19. График привязки

$$R_n(5, 7) = R_c(5, 7).$$

$$R_n(4, 6) = R_c(4, 6) + R_n(6, 7).$$

$$R_n(4, 5) = R_c(4, 5) + R_n(5, 7).$$

2) Начнем поиск критических путей (справа налево) с работ, завершающих проект. На графике привязки (см. рис. 19) две работы (6, 7) и (3, 7), которые заканчиваются позже остальных в завершающем событии № 7. Записываем работы, определенные как критические справа налево.

3) Найдем критическую работу из  $L_{кр}$ , предшествующую (6, 7). Код этой работы должен оканчиваться на 6. Таких работ две – (4, 6) и (3, 6). Но только одна из них – работа (3, 6) – по времени своего окончания вплотную «примыкает» на графике к началу работы (6, 7). Допишем слева найденную критическую

$$L_{кр_1} = \dots(6, 7)$$

работу (3, 6) к выражению

$$L_{кр_2} = \dots(3, 7).$$

4) Найдем критическую работу из  $L_{кр}$ , предшествующую (3, 6). Код этой работы должен оканчиваться на 3. Таких работ две – (2, 3) и (1, 3). Но только одна из них, работа (2, 3) по времени своего окончания вплотную «примыкает» на графике к началу работы (3, 6). Допишем слева найденную критическую работу (2, 3) к выражению  $L_{кр_1} = \dots(3, 6); (6, 7)$ .

5) Найдем критическую работу из  $L_{кр}$ , предшествующую (2, 3). Код этой работы должен оканчиваться на 2. Работа (1, 2) по времени своего окончания вплотную «примыкает» на графике к началу работы (2, 3). С этой работы начинается критический путь  $L_{кр_1} = (1, 2); (2, 3); (3, 6); (6, 7)$ .

б) Аналогичный поиск работ критического пути  $L_{кр}$  приводит к результату  $L_{кр2} = (1, 2); (2, 3); (3, 7)$ .

В другой форме записи  $L_{кр} = 1, 2, 3, 6, 7$  и  $L_{кр} = 1, 2, 3, 7$ .

7) Для наглядности выделим на графике привязки критические работы жирной линией.

## II. Поиск резервов работ.

1) Для всех найденных критических работ впишем в таблицу нулевые значения свободного и полного резервов. Рассмотрим некритические работы, начиная с конца таблицы.

$(i, j)$	$t(i, j)$	$R_c(i, j)$	$R_n(i, j)$	Критичность
1, 2	3	0	0	Критическая
1, 3	3	2	2	—
1, 4	2	0	1	—
1, 5	10	2	3	—
2, 3	2	0	0	Критическая
3, 6	5	0	0	Критическая
3, 7	9	0	0	Критическая
4, 5	10	0	1	—
4, 6	6	2	2	—
5, 7	1	1	1	—
6, 7	4	0	0	Критическая

1) Работа (5, 7), согласно графику привязки (см. рис. 19) заканчивается в 13-й день, а завершающее событие 7 сети, в которое она входит, наступает лишь в 14-й день. То есть, если работа (5, 7) задержится на 1 день, то это не повлияет на срок выполнения проекта ( $T_{кр} = 14$  дней). Поскольку (5, 7) – завершающая работа сети, то ее полный и свободный резервы равны  $R_n(5, 7) = R_c(5, 7) = 1$ .

2) Работа (4, 6) заканчивается в 8-й день, в то время как последующая работа (6, 7) начинается в 10-й день. То есть работа (4, 6) может задержаться на

2 дня и это никак не повлияет на время начала последующей работы (6, 7), т. е.

$$R_c(4, 6) = 2.$$

Полный резерв любой работы складывается из собственного свободного резерва и минимального из полных резервов непосредственно следующих работ.

За работой (4, 6) следует только критическая работа (6, 7) с нулевым полным резервом. Поэтому  $R_n(4, 6) = R_c(4, 6) + R_n(6, 7) = 2 + 0 = 2$ .

4) Работа (4, 5) заканчивается в 12-й день, в этот же день начинается следующая работа (5, 7), т. е. любая задержка выполнения работы (4, 5) приведет к задержке начала работы (5, 7). Это означает, что работа (4, 5) не имеет свободного резерва  $R_c(4, 5) = 0$ . Но если сдвинуть во времени работу (4, 5) на 1 день, то работа (5, 7) также сдвинется на 1 день и это не нарушит срок выполнения проекта, так как у работы (5, 7) есть временной резерв. Таким образом,

$$R_n(4, 5) = R_c(4,5) + R_n(5,7) = 0 + 1 = 1.$$

5) Работа (1, 5) заканчивается в 10-й день, в то время как последующая работа (5, 7) начинается в 12-й день, то есть работа (1, 5) может задержаться на 2 дня и это никак не повлияет на время начала последующей работы (5, 7), т. е.  $R_c(1, 5) = 2$ . Кроме того, поскольку последующая работа (5, 7) имеет резерв

в 1 день, то работу (1, 5) можно сдвинуть на 3 дня и это не нарушит сроков проекта (см. рис. 19), т. е.  $R_n(1, 5) = R_c(1, 5) + R_n(5, 7) = 2 + 1 = 3$ .

6) Работа (1, 4) заканчивается во 2-й день, и в этот же день начинаются следующие работы (4, 5) и (4, 6), то есть работа (1, 4) не имеет свободного резерва времени,  $R_c(1, 4) = 0$ . Поскольку после работы (1, 4) следуют две работы с различными полными резервами, то

$$R_n(1, 4) = R_c(1, 4) + \min[R_n(4, 5); R_n(4, 6)] = 0 + \min[1; 2] = 0 + 1 = 1.$$

7) Работа (1, 3) заканчивается в 3-й день, а следующие за ней работы (3, 6) и (3, 7) начинаются в 5-й день, т. е.  $R_c(1, 3) = 2$ . Поскольку обе последующие работы критические, то полный и свободный резерв работы (1, 3) совпадают  $R_n(1, 3) = R_c(1, 3) + \min[R_n(3, 6); R_n(3,7)] = 2 + \min[0; 0] = 2 + 0 = 2$ .

8) Ненулевые свободные резервы работ обозначены на графике привязки фигурными скобками (см. рис. 19).